Experimentalphysik III: Relativitätstheorie, Quantenphysik, Kern- und Teilchenphysik
Blatt 10

Prof. Dr. Kilian Singer
Übungsgruppe: Mi, 3.1.2016 15:15-17:00 (Raum 1135)
Abgabe: Do, 4.1.2016 14:00 (Raum 1165)
Übungsgruppenleiter: Stefan Aull (stefan.aull@posteo.de)

Aufgabe 31: **Fermi-Geschwindigkeit in Natrium** (3 Punkte)

Die Fermi-Geschwindigkeit v_F ist definiert durch $E_F = \frac{1}{2}mv_F^2$, wobei E_F die Fermi-Energie darstellt. Die Fermi-Energie für Leitungselektronen in Natrium beträgt 3.1 eV.

(a) Berechnen Sie die Fermigeschwindigkeit

(b) Welche Wellenlänge hätte ein Elektron mit dieser Geschwindigkeit?

(c) Wenn jedes Natriumatom ein Leitungselektron an das Elektronengas abgibt und der mittlere Abstand der Natriumatome etwa 0.37nm beträgt, muss dann das Gas der Leitungselektronen, entsprechend den Kriterien von Gleichung

$$\left(\frac{\lambda}{d}\right)^3 \ll 1, \text{ oder } \frac{N}{V}\frac{\hbar^3}{(mk_BT)^{3/2}} \ll 1 \tag{1}$$

als Quantengas behandelt werden?

Aufgabe 32: **Herleitung** (4 Punkte)

Herleitung von Gleichung

$$\overline{E} \cong \frac{3}{2}k_BT\left[1 \mp \frac{\pi^3\hbar^3\sqrt{2}}{(2s+1)(2\pi mk_BT)^{3/2}}\left(\frac{N}{V}\right)^1\right]. \tag{2}$$

Unser Modell zur Berechnung von E ist Gleichung

$$\overline{E} = \frac{\int_0^\infty E\mathcal{N}(E)D(E)dE}{\int_0^\infty \mathcal{N}(E)D(E)dE} \tag{3}$$

Darin gibt der Nenner die Gesamtzahl der Teilchen N und der Zähler die Gesamtenergie des Systems an, wobei wir letztere hier als U_{Gesamt} bezeichnen. Beginnen wir mit dem Nenner.

Setzen Sie die Zustandsdichte des Quantengases und einen Ausdruck für die Verteilung ein und unterscheiden Sie die Bose-Einstein-Statistik mittels $\mp$ von der Fermi-Dirac-Statistik. Substituieren Sie dann die Variablen: $E = y^2$ und klammern Sie Be^{+y/k_bT} aus dem Zähler aus. Im Integrand taucht der Faktor

$$\left(1 \mp \frac{1}{B}e^{-y^2/k_bT}\right)^{-1} \tag{4}$$

auf. Mit $(1\pm\epsilon)^{-1} \cong 1\mp\epsilon$ erhalten wir eine Summe aus zwei Gauß'schen Integralen. Das Integral enthält daher zwei Terme mit Potenzen von $1/B$. Wiederholen Sie diesen Prozess, bestimmen Sie aber nun unter Verwendung

$$U_{\text{Gesamt}} = \int_0^\infty E\mathcal{N}(E)D(E)dE \tag{5}$$

einen Ausdruck für U_{Gesamt} in Abhängigkeit von $1/B$. Dividieren Sie ihren Ausdruck für U_{Gesamt} durch den für N, beide in Abhängigkeit von $1/B$. Nun können Sie $1/B$ problemlos eliminieren, indem Sie in der Reihenentwicklung von N in Abhängigkeit von $1/B$ den Ausdruck mit der niedrigsten Ordnung verwenden.