

Experimentalphysik III: Relativitätstheorie, Quantenphysik, Kern- und Teilchenphysik

Blatt 4

Prof. Dr. Kilian Singer

Übungsgruppe: Mi, 25.11.2015 15:15-17:00 (Raum 1135)

Abgabe: Do, 26.11.2015 14:00 (Raum 1165)

Übungsgruppenleiter: Stefan Aull (stefan.aull@posteo.de)

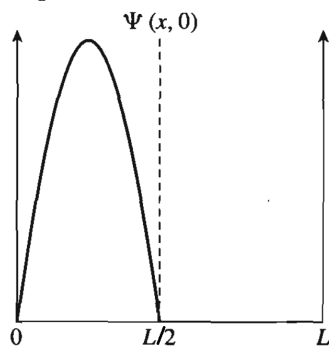
Aufgabe 11: Photon aus einem Quantentopf (1 Punkte)

Ein Quantenemitter stelle vereinfacht einen unendlich tiefen eindimensionalen Potentialtopf dar. Durch Übergänge zwischen den Energiezuständen werden eine Vielzahl von Photonen unterschiedlicher Wellenlänge beobachtet. Wie groß ist die Ausdehnung des Potentialtopfes, wenn das langwelligste Photon, welches emittiert wird ein IR Photon mit einer Wellenlänge von 1500nm ist?

Aufgabe 12: Teilchen in einer Boxhälfte (4 Punkte)

Eine unendlich tiefe Potentialtopf mit der Länge $L/2$ enthält ein Teilchen im Grundzustand. Dann wird mit einem Schlag die Größe des Potentialtopfes verdoppelt auf eine Länge von L . Doch nun befindet sich das Teilchen nicht mehr in einem stationären Zustand. Vielmehr wird der neue Zustand durch Linearkombination von Wellenfunktionen der Box mit Länge L beschrieben. Dadurch ergibt sich eine Zeitevolution.

Abbildung 1: Teilchen in einer Boxhälfte.



- (a) Stellen Sie die abgebildete Wellenfunktion $\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{4}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ in der neuen Basis dar und bestimmen Sie die Koeffizienten für $n = 1 \dots 9$:

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^9 a_n \Psi_n(x), \quad (5)$$

mit $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ den Basisfunktionen der Box mit Länge L . Die Expansionskoeffizienten a_n ergeben sich durch Berechnung des Überlappintegrals:

$$a_n = \int_0^L \Psi(x, 0) \Psi_n^*(x) dx, \quad (6)$$

denn die Basisfunktionen stellen eine orthonormale Basis dar:

$$\int_0^L \Psi_n(x) \Psi_m^*(x) dx = \delta_{nm}. \quad (7)$$

Da $\Psi_n(x)$ reel ist, ist $\Psi_n(x) = \Psi_n^*(x)$. Hinweis:

$$\int_0^a \sin(bx) \sin(cx) dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin((b+c)a)}{b+c} - \frac{\sin((b-c)a)}{b-c} \right]. \quad (8)$$

- (b) Um die Wellenfunktion perfekt darzustellen müsste man eigentlich eine unendliche Anzahl von Basisfunktionen verwenden. Welcher Fehler wird durch die Verwendung von nur 9 Basisfunktionen gemacht?
- (c) Geben sie den Ausdruck für die zeitabhängige Wellenfunktion an. Was ist die Periodendauer T , nach welcher gilt $\Psi(x, 0) = \Psi(x, T)$? Hinweis: Der zeitabhängige Term der Basiswellenfunktionen ist $e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$ mit $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.
- (d) Wir wollen nun das Teilchen in der Boxhälfte mittels eines kleinen Javascript-Programm simulieren. Erzeugen Sie hierzu zunächst einen neuen Ordner. Speichern sie folgende html-Datei <http://adventure.zdv.uni-mainz.de/modernphysics/blatt4/halfbox0.html> in diesen Ordner. Editieren Sie sie mit einem Texteditor oder direkt mit Chrome im Entwicklermodus, welchen sie mittels der Tastenkombination SHIFT+STRG+I (Windows/Linux) bzw. CMD+OPT+I (MAC) aktivieren. Klicken Sie auf Sources, damit sie die Datei editieren können sollten sie rechts klicken und den neu erstellten Ordner zum Workspace hinzufügen. Achten Sie beim Editieren darauf, dass sie immer auf die Datei im Workspace klicken. Der Browser wird sie warnen, dass sie Vollzugriff benötigen, erlauben Sie dies. Mit CTRL+s können sie die Datei speichern und mit F5 im Browser Fenster neu laden. Sie müssen nun lediglich die vier Stellen welche mit *//CHANGE HERE* gekennzeichnet ist physikalisch sinnvoll verändern. Wir verwenden $L = 500$ und um die Numerik zu vereinfachen, haben wir $\hbar = 1$ und $m = 1$ gesetzt. Geben Sie schließlich die berechneten Koeffizienten ein. Öffnen Sie mit ESC die Konsole. Dort können sie mit *stop()* die Zeit anhalten (und mit *start()* wieder starten). Dann tippen sie *reset()* ein. Sie sollten falls sie alles richtig gemacht haben das Teilchen in der linken Hälfte sehen. Überprüfen sie mit *reset(T)* ob sie die Periodendauer T richtig berechnet haben. Anstelle von T sollte die berechnete Periode stehen (Achtung $\hbar = m = 1$). Was passiert bei $T/2$?

Aufgabe 13: Numerov (2 Punkte)

Verwenden Sie die Numerov-Methode

$$\Psi(x + \Delta x) = \frac{\Psi(x) \left(2 + \frac{10}{12} g(x) \Delta x^2 \right) - \Psi(x - \Delta x) \left(1 - \frac{1}{12} g(x - \Delta x) \Delta x^2 \right)}{1 - \frac{1}{12} \Delta x^2 g(x + \Delta x)}, \quad (15)$$

um Wellenfunktionen und diskrete Energien zu finden. $\Psi(0)$ und $\Psi(\Delta x)$ wird hierzu auf einen kleinen wert z.B. 0.1 gesetzt. Sie können dann diese Formel iterativ anwenden, um die Wellenfunktion zu berechnen. Allerdings wird diese bei falscher Wahl der Energie für $x \rightarrow \infty$ divergieren. Suchen Sie nach der passenden Energie für den harmonischen Oszillator, für welchen die zeitunabhängigen Schrödingergleichung folgende Form hat

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Psi(x) = E \Psi(x). \quad (16)$$

Glücklicherweise gibt es wieder einen fast fertigen Code <http://adventure.zdv.uni-mainz.de/modernphysics/blatt4/numerov0.html>.

- (a) Fügen Sie obige Gleichung an der mit *//CHANGE HERE* markierten Stelle ein. $\Psi(10 \times \Delta x)$ entspricht *psi[10]*, Δx entspricht *dx*. Testen Sie ihren Code. Was fällt Ihnen bei den Abständen der Energieniveaus auf? (Hinweis: Wir haben wieder $\hbar = m = 1$ gesetzt.)
- (b) Wieviele diskrete Energieniveaus besitzt der endlich tiefe Potentialtopf mit einer Wandhöhe von 0.015. Die linke Wand soll bei der Arrayposition 7000 enden und die rechte Wand soll bei 18000 wieder anfangen. Ändern Sie den code an der Stelle, die mit *CHANGE LATER* markiert ist. Diese Zeile können sie auskommentieren indem Sie an den Anfang der Zeile zwei Schrägstriche *//* schreiben. Dann verwenden Sie folgende Kontrollstruktur

```
if (...) return ...;
else if (...) return ...;
else return ...
```

und starten Sie die Simulation.